Las variables duales y su interpretación económica: precios sombra

Del resultado de dualidad fuerte se desprende el resultado más importante de la dualidad: **las variables duales óptimas representan el cambio marginal de la función objetivo a cambios en el lado derecho de las restricciones**, por esta razón se les conoce como precios sombra. La derivación matemática de esta propiedad es la siguiente:

$$\boldsymbol{z}^* = \mathbf{w}^*\mathbf{b} = \mathbf{c}\boldsymbol{x}^*$$

Si derivamos parcialmente la función objetivo óptima con respecto a los componentes de $\boldsymbol{b}$, tenemos:

$$\frac{\partial z^*}{\partial b} = \mathrm{w}^*$$

Esto quiere decir que las variables duales óptimas asociadas con cada restricción nos dirán qué tan sensible es la solución óptima a cambios en el lado derecho de la restricción correspondiente. Algo interesante es que no es necesario resolver el problema dual para tener las variables duales óptimas. Si recordamos que $\boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}$ y reemplazamos en la ecuación anterior de dualidad fuerte ($\boldsymbol{z}^* = \mathbf{w}^*\mathbf{b} = \mathbf{c}\boldsymbol{x}^*$), tendremos:

$$\boldsymbol{z}^* = \mathbf{w}^*\mathbf{b} = \boldsymbol{c_B}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}$$

Al observar cuidadosamente este resultado y recordar que las variables no básicas están en cero podemos deducir que:

$$\mathbf{w}^* = \boldsymbol{c_B}\boldsymbol{B}^{-1}$$

Con esta ecuación podemos calcular las variables duales óptimas sin tener que resolver el problema dual, solo hay que calcular $\boldsymbol{c_B}\boldsymbol{B}^{-1}$ una vez se ha llegado a la solución óptima del problema primal. Veámoslo en el ejemplo luego de llevar el problema primal a forma estándar (algo indispensable para poder usar los resultados del método simplex):

$\min 6x_1 + 8x_2 + 0s_1 + 0s_2$

Sujeto a:

$3x_1 + x_2 - s_1 = 4$

$5x_1 + 2x_2 - s_2 = 7$

$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0, s_1 \geq 0, s_2 \geq 0$

Reemplazando $x_1^* = 1.4,\ x_2^* = 0$ tenemos

$3x_1^* + x_2^* \geq 4 \rightarrow 3(1.4) + 0 = 4.2 > 4.0 \rightarrow s_1 = 0.2$

$5x_1 + 2x_2 \geq 7 \rightarrow 5(1.4) + 2(0) = 7 = 7 \rightarrow s_2 = 0$

De esta manera, las variables básicas en la solución óptima son x_1 y s_1 con base óptima:

$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{B^{-1}} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{5} \\ -1 & \frac{3}{5} \end{bmatrix}$$

Si calculamos las variables básicas, a manera de prueba, tendremos:

$$\boldsymbol{x_B} = \boldsymbol{B^{-1}b} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{5} \\ 1 & -\frac{3}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{7}{5} \\ \frac{1}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.4 \\ 0.2 \end{bmatrix},$$

que cuando calculamos la función objetivo es: $6(1.4) + 0(0.2) = 8.4$

Si ahora calculamos las variables duales óptimas tenemos ($\mathbf{w}^* = \boldsymbol{c_B B^{-1}}$):

$$\boldsymbol{c_B B^{-1}} = [6 \quad 0] \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{5} \\ 1 & -\frac{3}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{6}{5} \end{bmatrix} = [0 \quad 1.2] = [w_1^* \quad w_2^*]$$

Y si calculamos la función objetivo del problema dual tenemos: $4(0) + 7(1.2) = 8.4$, lo cual nos muestra que ambas funciones objetivo óptimas son iguales, es decir que se cumple el teorema de dualidad fuerte.

Ahora por fin llegaremos a la interpretación de las variables duales. La primera de las variables duales óptimas es $w_1^* = 0$, lo cual indica que si cambiamos levemente el lado derecho de la primera restricción no habrá cambio en la función objetivo óptima. Recordemos la definición del precio sombra: $\frac{\partial z^*}{\partial b_1} = \mathrm{w}_1 = 0$ **. (Intente resolver el problema primal con un cambio pequeño del lado derecho —0.1, por ejemplo— en la primera restricción y verá que la solución óptima no cambia, lo cual es consistente con este resultado).**

Por el contrario, si consideramos la segunda restricción tenemos $w_2^* = 1.2$; esto significa que la solución óptima cambiará en 1.2 unidades por cada unidad que cambie el lado derecho $\frac{\partial z^*}{\partial b_2} = \mathrm{w}_2 = 1.2$. **Nuevamente, cambie el lado derecho de la segunda restricción por un valor superior en 0.1 y comprobará que el valor de la función objetivo crecerá consistentemente en 0.12 unidades (de 8.4 a 8.52).**

En palabras del profesor

Para aquellos que no han tomado un curso de cálculo en varias variables esta es una buena referencia para la definición de la derivada parcial.

- Introducción a las derivadas parciales.