## El problema dual: ¿cómo construirlo?

Al problema de optimización principal (el que nos interesa originalmente) lo llamaremos **problema primal (P)**. Este problema tiene asociado otro problema, conocido como **problema dual (D)**. De cierta manera, el problema dual caracteriza la sensibilidad del primal a los cambios en las entradas (en particular del lado derecho de las restricciones). Las siguientes relaciones nos guían en la construcción del problema dual:

- Por cada restricción del problema primal, el problema dual tiene una variable y los lados derechos del problema primal son los coeficientes de la función objetivo para las variables del dual.
- Por cada variable del problema primal hay una restricción en el problema dual y los coeficientes de la función objetivo del primal son los lados derechos de las restricciones del dual.
- Finalmente, la matriz $A$ se transpone para obtener la matriz del problema dual.

Para la construcción del problema dual usaremos la Tabla 1, que define las relaciones entre las restricciones del problema primal y las variables duales, así como entre las variables del problema primal y las restricciones del problema dual. Cuál problema se llama primal y cuál dual es un asunto menor, más importante para la construcción del problema dual es cuál es el problema de minimización y cuál el problema de maximización.

### Tabla 1. Relaciones de dualidad entre variables y restricciones

| Problema de minimización | | | Problema de maximización | |
|---|---|---|---|---|
| Variables | $\geq 0$ | $\longleftrightarrow$ | $\leq$ | Restricciones |
| | $\leq 0$ | $\longleftrightarrow$ | $\geq$ | |
| | No restringida | $\longleftrightarrow$ | $=$ | |
| Restricciones | $\geq$ | $\longleftrightarrow$ | $\geq 0$ | Variables |
| | $\leq$ | $\longleftrightarrow$ | $\leq 0$ | |
| | $=$ | $\longleftrightarrow$ | No restringida | |

Fuente: Rardin (2017).

Veamos un ejemplo y un primer resultado de dualidad.

Si el problema primal es:

P:

$\min 6x_1 + 8x_2$

Sujeto a:

$3x_1 + x_2 \geq 4$ (Variable dual $w_1$)

$5x_1 + 2x_2 \geq 7$ (Variable dual $w_2$)

$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$

el problema dual será de maximización, y como hay dos restricciones tendrá dos variables, que llamaremos $w_1$ y $w_2$, cada una asociada con una restricción. Como las restricciones del problema de minimización son de $\geq$ (mayor o igual), según la definición de la Tabla 1, $w_1 \geq 0$ y $w_2 \geq 0$.

Ahora, para definir la función objetivo del dual usemos la definición que dice que los lados derechos del primal serán los coeficientes de las variables duales correspondientes en la función objetivo. De esta manera el problema dual (que será de maximización) tendrá como función objetivo la siguiente:

$$\max 4w_1 + 7w_2$$

Ahora, fijemos nuestra atención en las restricciones del problema dual, que se relacionan con las variables del problema primal. Como las variables del problema de minimización son $\geq 0$, las restricciones serán de $\leq$ y sus lados derechos serán los coeficientes de la función objetivo (6 y 8, respectivamente).

Finalmente, transpongamos la matriz $A$ para obtener las restricciones del dual, es decir, por cada columna de una variable del primal tendremos una fila (restricción del dual) correspondiente a esta variable. Así, para $x_1$, cuya columna es $\begin{bmatrix}3\\5\end{bmatrix}$, tendremos la restricción $3w_1 + 5w_2 \leq 6$. Mientras que para $x_2$, con columna $\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$, tendremos $w_1 + 2w_2 \leq 8$. De esta manera, el problema dual asociado con nuestro problema primal $\mathrm{P}$ será:

$\mathrm{D}$:

$$\max 4w_1 + 7w_2$$

Sujeto a:

$3w_1 + 5w_2 \leq 6$ (Variable primal $x_1$)

$w_1 + 2w_2 \leq 8$ (Variable primal $x_2$)

$w_1 \geq 0,\ w_2 \geq 0.$

Ahora, con este ejemplo lo invitamos a probar el primero de los resultados de la dualidad: **el dual del dual es el primal**. Por esta razón la Tabla 1 se puede leer en ambas direcciones: si el problema primal fuese el de maximización, con la ayuda de la tabla podríamos construir el dual de minimización. Use la Tabla 1 para construir el problema dual del problema que acabos de obtener y verá que resultado obtiene (use como variables del problema dual las letras $y$):

$$\max 4w_1 + 7w_2$$

Sujeto a:

$3w_1 + 5w_2 \leq 6$ (Variable dual $y_1$)

$w_1 + 2w_2 \leq 8$ (Variable dual $y_2$)

$w_1 \geq 0,\ w_2 \geq 0.$

Un segundo resultado que nos será muy útil en la derivación de las demás propiedades y teoremas es el siguiente. **Los problemas de minimización y maximización escritos en forma canónica son el dual el uno del otro.**

| | |
|---|---|
| **P**:<br>$min\ \mathbf{cx}$<br>Sujeto a:<br>$\mathbf{Ax} \geq \mathbf{b}$<br>$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ | **D**:<br>$max\ \mathbf{wb}$<br>Sujeto a:<br>$\mathbf{wA} \leq \mathbf{c}$<br>$\mathbf{w} \geq \mathbf{0}$ |